49.2. Уравнения, допускающие понижение порядка

Одним из методов интегрирования ДУ высших порядков является *метод понижения порядка*. Суть метода состоит в том, что с помощью замены переменной (подстановки) данное ДУ сводится к уравнению, порядок которого ниже.

Рассмотрим три типа уравнений, допускающих понижение порядка.

I. Пусть дано уравнение

$$\boxed{y'' = f(x).} \tag{49.6}$$

Порядок можно понизить, введя новую функцию $p(x)$, положив $y' = p(x)$. Тогда $y'' = p'(x)$ и получаем ДУ первого порядка: $p' = f(x)$. Решив его, т. е. найдя функцию $p = p(x)$, решим уравнение $y' = p(x)$. Получим общее решение заданного уравнения (49.6).

На практике поступают иначе: порядок понижается непосредственно путем последовательного интегрирования уравнения.

Так как $y'' = (y')' = \frac{dy'}{dx}$, уравнение (49.6) можно записать в виде $dy' = f(x)\,dx$. Тогда, интегрируя уравнение $y'' = f(x)$, получаем: $y' = \int f(x)\,dx$, или $y' = \varphi_1(x) + c_1$. Далее, интегрируя полученное уравнение по x, находим: $y = \int(\varphi_1(x) + c_1)\,dx$, т. е. $y = \varphi_2(x) + c_1x + c_2$ — общее решение данного уравнения.

Если дано уравнение

$$y^{(n)} = f(x),$$

то, проинтегрировав его последовательно n раз, найдем общее решение уравнения: $y = \varphi_n(x) + c_1 \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_2 \cdot \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + c_n$.

Пример 49.1. Решить уравнение $y^{IV} = \sin 2x$.

❍ Решение: Последовательно интегрируя четыре раза данное уравнение, получим

$$y''' = \int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c_1,$$

$$y'' = \int -\frac{1}{2}\cos 2x\,dx + \int c_1\,dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + c_1x + c_2,$$

$$y' = \frac{1}{8}\cos 2x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3,$$

$$y = \frac{1}{16}\sin 2x + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3x + c_4.$$ ●

II. Пусть дано уравнение

$$\boxed{y'' = f(x; y'),} \tag{49.7}$$

не содержащее явно искомой функции y.

Обозначим $y' = p$, где $p = p(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = p'$ и уравнение (49.7) принимает вид $p' = f(x; p)$. Пусть $p = \varphi(x; c_1)$ — общее решение полученного ДУ первого порядка. Заменяя функцию p на y', получаем ДУ: $y' = \varphi(x; c_1)$. Оно имеет вид (49.6). Для отыскания y достаточно проинтегрировать последнее уравнение. Общее решение уравнения (49.7) будет иметь вид $y = \int \varphi(x; c_1)\,dx + c_2$.

Частным случаем уравнения (49.7) является уравнение

$$\boxed{y'' = f(y'),} \tag{49.8}$$

не содержащее также и независимую переменную x. Оно интегрируется тем же способом: $y' = p(x)$, $y'' = p' = \frac{dp}{dx}$. Получаем уравнение $p' = f(p)$ с разделяющимися переменными.

Если задано уравнение вида

$$\boxed{F(x; y^{(k)}; y^{(k+1)}; \ldots; y^{(n)}) = 0,} \tag{49.9}$$

которое также не содержит явно искомой функции, то его порядок можно понизить на k единиц, положив $y^{(k)} = p(x)$. Тогда $y^{(k+1)} = p'; \ldots; y^{(n)} = p^{(n-k)}$ и уравнение (49.9) примет вид $F(x; p; p'; \ldots; p^{(n-k)}) = 0$.

Частным случаем уравнения (49.9) является уравнение

$$F(x; y^{(n-1)}; y^{(n)}) = 0,$$

или

$$\boxed{y^{(n)} = f(x; y^{(n-1)}).}$$

С помощью замены $y^{(n-1)} = p(x)$, $y^{(n)} = p'$ это уравнение сводится к ДУ первого порядка.

Пример 49.2. Решить уравнение $y'' - \frac{y'}{x} = 0$.

❍ Решение: Полагаем $y' = p$, где $p = p(x)$, $y'' = p'$.

Тогда $p' - \frac{p}{x} = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x}$, $\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя, получим $\ln|p| = \ln|x| + \ln|c_1|$, $\ln|p| = \ln|c_1x|$, $p = c_1x$. Возвращаясь к исходной переменной, получим $y' = c_1x$, $y = c_1\frac{x^2}{2} + c_2$ — общее решение уравнения. ●

III. Рассмотрим уравнение

$$\boxed{y'' = f(y; y'),} \tag{49.10}$$

которое *не содержит* явно *независимой переменной* x.

Для понижения порядка уравнения введем новую функцию $p = p(y)$, зависящую от переменной y, полагая $y' = p$. Дифференцируем это равенство по x, учитывая, что $p = p(y(x))$:

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot p,$$

т. е. $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$. Теперь уравнение (49.10) запишется в виде $p \cdot \frac{dp}{dy} = f(y; p)$. Пусть $p = \varphi(y; c_1)$ является общим решением этого ДУ первого порядка. Заменяя функцию $p(y)$ на y', получаем $y' = \varphi(y; c_1)$ — ДУ с разделяющимися переменными. Интегрируя его, находим общий интеграл уравнения (49.10):

$$\int \frac{dy}{\varphi(y; c_1)} = x + c_2.$$

Частным случаем уравнения (49.10) является ДУ

$$\boxed{y'' = f(y).}$$

Такое уравнение решается при помощи аналогичной подстановки: $y' = p(y)$, $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$.

Так же поступаем при решении уравнения $F(y; y'; y''; \ldots; y^{(n)}) = 0$. Его порядок можно понизить на единицу, положив $y' = p$, где $p = p(y)$. По правилу дифференцирования сложной функции находим $y'' = p\frac{dp}{dy}$. Затем найдем $y''' = \frac{d}{dx}(p \cdot p'_y) = \frac{d}{dy}(p \cdot p'_y) \cdot \frac{dy}{dx} = p((p'_y)^2 + p \cdot p''_{yy})$ и т. д.

Замечание. Уравнение (49.8) также можно решать, применяя подстановку $y' = p$, где $p = p(y)$.

Пример 49.3. Найти частное решение уравнения

$$y'' - (y')^2 + y'(y-1) = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

◔ Решение: Уравнение имеет вид (49.10). Положив $y' = p(y)$, $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$, получаем:

$$p \cdot \frac{dp}{dy} - p^2 + p(y-1) = 0.$$

Так как $p \neq 0$ (иначе $y' = 0$, что противоречит начальному условию $y' = 2$), то $\frac{dp}{dy} - p + y - 1 = 0$ — получили линейное ДУ первого порядка.

Проведем решение полученного линейного ДУ методом Бернулли (п. 48.4). Полагаем $p = u \cdot v$. Имеем: $u'v + uv' - uv + y - 1 = 0$, или $u'v + u(v' - v) = 1 - y$.

Подберем функцию v так, чтобы $v' - v = 0$. Тогда $\frac{dv}{v} = dy$, $v = e^y$. Получаем:

$$u' \cdot e^y + u \cdot 0 = 1 - y, \quad \text{т. е.} \quad du = (1-y) \cdot e^{-y}\, dy.$$

Интегрируя это равенство, находим, что $u = -(1-y) \cdot e^{-y} + e^{-y} + c_1$. Следовательно,

$$p = uv = ((-1+y)e^{-y} + e^{-y} + c_1) \cdot e^{+y}, \quad \text{или} \quad p = c_1 e^y + y.$$

Заменяя p на y', получаем: $y' = c_1 \cdot e^y + y$. Подставляя $y' = 2$ и $y = 2$ в это равенство, находим c_1:

$$2 = c_1 e^2 + 2, \quad c_1 = 0.$$

Имеем $y' = y$. Отсюда $y = c_2 e^x$. Находим c_2 из начальных условий: $2 = c_2 e^0$, $c_2 = 2$. Таким образом, $y = 2e^x$ — частное решение данного ДУ. ●

§ 4. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Однородные уравнения. Уравнение вида

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0, \qquad (1)$$

где a_0, a_1, a_2 — постоянные, называется *линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами*.

Теорема. *Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — частные решения уравнения $a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$, причем их отношение $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{const}$, то $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ есть общее решение этого уравнения.*

Для определения частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (1) следует предварительно решить характеристическое уравнение

$$a_0r^2 + a_1r + a_2 = 0. \qquad (2)$$

При решении квадратного уравнения (2) возможны три случая:

Таблица 14

Корни уравнения (2)	Частные решения (1)	Общее решение (1)
1. Действительные разные r_1, r_2	$y_1 = e^{r_1x}$, $y_2 = e^{r_2x}$	$C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$
2. Равные $r_1 = r_2$	$y_1 = e^{r_1x}$, $y_2 = xe^{r_1x}$	$e^{r_1x}(C_1 + C_2x)$
3. Комплексные сопряженные $\alpha \pm \beta i$	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$	$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

2006. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$2y'' + 5y' + 2y = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$2r^2 + 5r + 2 = 0.$$

Корни его разные действительные: $r_1 = -2$, $r_2 = -\frac{1}{2}$, поэтому

$$y_1 = e^{-2x},\ y_2 = e^{-\frac{1}{2}x}$$

— частные решения;

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-\frac{1}{2}x}$$

— общее решение данного уравнения.

2007. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y|_{x=0} = 4$, $y'|_{x=0} = 2$.

Решение. Корни характеристического уравнения $r^2 - 2r + 1 = 0$ действительные, равные: $r_1 = r_2 = 1$, поэтому частные решения будут

$$y_1 = e^x,\ y_2 = xe^x,$$

а

$$y = e^x(C_1 + C_2x)$$

— общее решение данного дифференциального уравнения.

Для определения частного решения в равенства

$$y = e^x(C_1 + C_2x) \text{ и } y' = e^x(C_2x + C_1 + C_2)$$

подставим начальные условия. Получим систему двух уравнений

$$4 = C_1,\ 2 = C_1 + C_2,$$

из которой определяем $C_1 = 4$, $C_2 = -2$. Подставив эти значения в общее решение, найдем частное:

$$y = e^x(4 - 2x).$$

2008. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 6y' + 13y = 0.$$

Решение. Корни характеристического уравнения $r^2 + 6r + 13 = 0$, комплексные сопряженные: $-3 \pm 2i$. Согласно табл. 14 (случай 3-й, $\alpha = -3$, $\beta = 2$), общее решение данного уравнения будет

$$y = e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x).$$

2. Неоднородные уравнения. Рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = f(x) \tag{3}$$

с постоянными коэффициентами a_0, a_1, a_2 и с непрерывной правой частью $f(x)$. Уравнение с теми же коэффициентами, но с правой частью, равной нулю:

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0, \tag{4}$$

называется *однородным уравнением, соответствующим неоднородному* уравнению (3).

Для линейных неоднородных уравнений справедливы следующие теоремы, с помощью которых отыскиваются их общие решения.

Теорема 1. *Если известно какое-нибудь частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения $a_0y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$, то общее его решение y есть сумма этого частного решения и общего решения Y соответствующего однородного уравнения $a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$, т. е. $y = \tilde{y} + Y$.*

Теорема 2. *Если y_1 — частное решение уравнения $a_0y'' + a_1y' + a_2y = f_1(x)$, а y_2 — частное решение уравнения $a_0y'' + a_1y' + a_2y = f_2(x)$, то $y_1 + y_2$ есть частное решение уравнения $a_0y'' + a_1y' + a_2y = f_1(x) + f_2(x)$.*

Сформулируем теоремы, при помощи которых находятся частные решения линейных неоднородных уравнений для специальных правых частей.

Теорема 3. *Если правая часть линейного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид $e^{\alpha x}P(x)$, где $P(x)$ — многочлен n-й степени и α не является корнем характеристического уравнения, то существует частное решение вида $\tilde{y} = e^{\alpha x}M(x)$, где $M(x)$ — некоторый многочлен n-й степени:*

$$M(x) = A_0 + A_1x + A_2x + \ldots + A_nx^n.$$

Если же α является корнем характеристического уравнения кратности k ($k=1$ или $k=2$), то существует частное решение вида $\tilde{y} = x^ke^{\alpha x}M(x)$.

В частности, при $\alpha = 0$ правая часть — многочлен n-й степени, и если $\alpha = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение $M(x)$ — также некоторый многочлен той же степени. Если же $\alpha = 0$ — корень кратности k, то частное решение имеет вид $x^kM(x)$.

Теорема 4. *Если правая часть линейного уравнения с постоянными коэффициентами может быть представлена в виде*

$$e^{\alpha x}[P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x], \tag{5}$$

где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — многочлены (n — наибольшая из их степеней) и $z = \alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то существует частное решение вида

$$\tilde{y} = e^{\alpha x}[M(x)\cos\beta x + N(x)\sin\beta x], \tag{6}$$

где

$$M(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n$$

и

$$N(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \ldots + B_nx^n$$

— многочлены степени n. Если же $\alpha + \beta i$ является корнем характеристического уравнения кратности k, то существует частное решение вида

$$\tilde{y} = x^ke^{\alpha x}[M(x)\cos\beta x + N(x)\sin\beta x]^*.$$

2021. Проинтегрировать уравнение $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$.

Решение. Корнями характеристического уравнения $r^2 - 5r + 6 = 0$ будут $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, следовательно,

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$$

— общее решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$. Представив правую часть в виде (5)

$$13\sin 3x = e^{0x}[0\cdot\cos 3x + 13\sin 3x],$$

видим, что $\alpha = 0$, $\beta = 3$, $P(x) = 0$, $Q(x) = 13$ (многочлены нулевой степени). И так как число $z = \alpha + \beta i = 3i$ не равно r_1 и r_2, то частное решение ищем в виде (6), положив

$$M(x) = A_0 \text{ и } N(x) = B_0,$$

$$\tilde{y} = e^{0x}[A_0\cos 3x + B_0\sin 3x] = A_0\cos 3x + B_0\sin 3x.$$

Найдем:

$$\tilde{y}' = -3A_0\sin 3x + 3B_0\cos 3x; \quad \tilde{y}'' = -9A_0\cos 3x - 9B_0\sin 3x.$$

Подставив значения $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ в данное уравнение, получим тождество

$$-9A_0\cos 3x - 9B_0\sin 3x - 5(-3A_0\sin 3x + 3B_0\cos 3x) +$$
$$+ 6(A_0\cos 3x + B_0\sin 3x) = 13\sin 3x,$$

или

$$-3(A_0 + 5B_0)\cos 3x + 3(5A_0 - B_0)\sin 3x = 13\sin 3x.$$

Приравняем коэффициенты при $\sin 3x$ и $\cos 3x$:

$$-3(A_0 + 5B_0) = 0, \quad 3(5A_0 - B_0) = 13.$$

Решив систему, получим $A_0 = \frac{5}{6}$, $B_0 = -\frac{1}{6}$. Частное решение данного неоднородного уравнения

$$\tilde{y} = \frac{5}{6}\cos 3x - \frac{1}{6}\sin 3x;$$

общее решение

$$y = Y + \tilde{y} = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{6}(5\cos 3x - \sin 3x).$$

Пример 51.2. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = x - 4$.

❍ Решение: Найдем общее решение $\widehat{y}$ ЛОДУ $y'' - 2y' + y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ имеет корень $k_1 = 1$ кратности 2. Значит, $\widehat{y} = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x$. Находим частное решение исходного уравнения. В нем правая часть $x - 4 = (x - 4) \cdot e^{0 \cdot x}$ есть формула вида $P_1(x) \cdot e^{0 \cdot x}$, причем $\alpha = 0$, не является корнем характеристического уравнения: $\alpha \neq k_1$. Поэтому, согласно формуле (51.12), частное решение y^* ищем в виде $y^* = Q_1(x) \cdot e^{0 \cdot x}$, т. е. $y^* = Ax + B$, где A и B — неопределенные коэффициенты. Тогда $(y^*)' = A$, $(y^*)'' = 0$. Подставив y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$ в исходное уравнение, получим $-2A + Ax + B = x - 4$, или $Ax + (-2A + B) = x - 4$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A = 1, \\ -2A + B = -4. \end{cases}$$

Отсюда $A = 1$, $B = -2$. Поэтому частное решение данного уравнения имеет вид $y^* = x - 2$. Следовательно, $y = (\widehat{y} + y^*) = c_1 e^x + c_2 x e^x + x - 2$ — искомое общее решение уравнения. ●